

Практическая работа

Математические методы построения эффективности систем. Методы многокритериальной оптимизации

Цели работы

Целью работы является ознакомление с методами построения математических моделей в задачах многокритериальной оптимизации и решение их средствами пакета Ms Excel.

Теоретические сведения

Оптимальность по Парето

В задаче МКО точка $X_0 \in D$ называется *оптимальной по Парето*, если не существует другой точки $X \in D$, которая была бы предпочтительнее, чем X_0 .

Точки, оптимальные по Парето, образуют *множество точек, оптимальных по Парето* (множество эффективных точек) $D_p \subset D$.

Оптимальные решения многокритериальной задачи следует искать только среди элементов множества альтернатив D_p . В этой области ни один критерий не может быть улучшен без ухудшения хотя бы одного из других. Важным свойством множества Парето D_p является возможность «выбраковывать» из множества альтернатив D заведомо неудачные, уступающие другим по всем критериям.

Обычно решение многокритериальной задачи должно начинаться с выделения множества D_p . При отсутствии дополнительной информации о системе предпочтений ЛПР должно принимать решение именно из множества Парето D_p .

В векторной оптимизации кроме множества Парето в общем случае нет общих правил, по которому варианту X_2 отдается предпочтение по сравнению с другим вариантом X_1 .

Часто решение многокритериальной задачи состоит в построении множества Парето-оптимальных точек и дальнейшем выборе одной из них на основе «здравого смысла» или с помощью какого-либо другого критерия.

Во всех случаях задача многокритериальной оптимизации каким-то способом сводится к задаче с одним критерием. Существует много способов построения такого окончательного критерия, однако ни одному из них нельзя заранее отдать наибольшее предпочтение. Для каждой задачи этот выбор должен делаться ЛПР.

Заметим, что целевые функции отображают множество точек, оптимальных по Парето $D_p \subset D \subset R^n$ в множество $F_p \subset F \subset R^k$, которое называется *множеством Парето*.

Метод анализа иерархий

В соответствии с мнением *Т.Саати*, предложившего *метод анализа иерархий*, для реализации метода необходимо осуществить следующие этапы:

Этап 1. Очертить проблему и определить, что необходимо узнать.

Этап 2. Построить иерархию, начиная с вершины (цели), через промежуточные уровни (характеристики, от которых зависят последующие уровни) к самому нижнему уровню (альтернативам).

Этап 3. Построить множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней – по одной матрице для каждого элемента, примыкающего сверху уровня. Этот элемент называют зависимым по отношению к элементу, находящемуся на нижнем

уровне. Элементы любого уровня сравниваются друг с другом относительно их воздействия на направляемый элемент.

Этап 4. Вычисляются компоненты собственного вектора как средние геометрические по строке. После нахождения, компоненты собственного вектора нормируются, что дает вектор приоритетов или весов объектов.

Этап 5. После проведения парных сравнений и получения данных по собственному вектору можно определить согласованность. Для этого, используя отклонение l_{max} от n (n – размерность матрицы), проверяется индекс согласованности; и сравнивая с соответствующими средними значениями, полученных для матрицы, построенной случайным образом, получаем отношение согласованности.

Этап 6. Этапы 3, 4 и 5 проводятся для всех уровней и групп в иерархии.

Этап 7. Проводится вычисление общего веса варианта решения путем последовательного взвешивания векторов весов нижележащего уровня (вариантов решений) компонентами вектора весов вышележащего уровня (характеристик).

Этап 8. Согласованность всей иерархии можно найти, перемножая каждый индекс согласованности на приоритет соответствующей характеристики и суммируя полученные числа. Результат затем делится на выражение такого же типа, но со случайным индексом согласованности, соответствующим размерам каждой взвешенной приоритетами матрицы. Приемлемым является ОС не более 10%. Иначе следует провести переоценку соответствующей матрицы.

При проведении сравнения и построении матриц парных сравнений желательно использовать не более 7 ± 2 элемента на уровне.

Методика выполнения работы

Задания выполняются по вариантам, пример выполнения работы приведен ниже.

Задание 1. Определение множества Парето.

Для иллюстрации *нахождения множества Парето* рассмотрим пример:

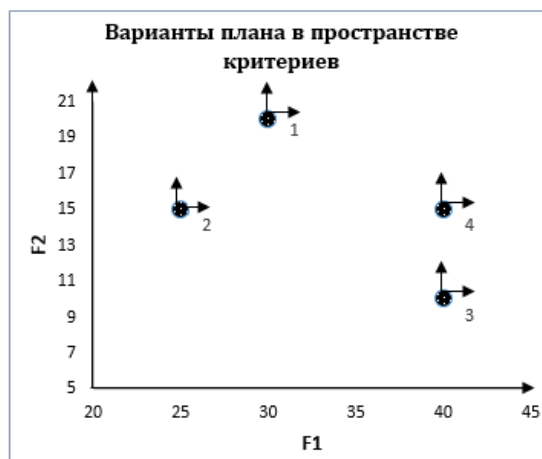
Пример 1. Предприятие выпускает несколько видов изделий. ЛПР нужно оценить четыре варианта плана производства и выбрать наилучший из них. Критериями их оценки являются два показателя: валовой объем выпуска продукции F_1 и прибыль F_2 . Оба критерия имеют тип максимум. Значения показателей приведены в таблице.

Оценки вариантов плана выпуска

Номер варианта	F_1	F_2
1	30	20
2	25	15
3	40	10
4	40	15

Сравнение первых двух вариантов показывает, что значения всех критериев варианте 1 лучше значений варианта 2, а значит он предпочтительнее. Сравнивая вариант 3 и вариант 4, ЛПР делает вывод, что вариант 4 лучше, так как значение критерия F_2 больше. Таким образом, варианты 2 и 3 можно исключить из рассмотрения, так как они являются *доминируемыми*.

Представим графически с использованием пакета Ms Excel данные примера:



Такое представление множества оценок альтернатив может существенно облегчить задачу выделения *множества Парето*. В случае с двумя критериями это достаточно просто. Проводя через каждую точку мысленно координатные оси в направлении возрастания критериев, смотрим – если полученный ортант не содержит точек-образов других вариантов, то вариант эффективен. В противном случае его доминируют все варианты, образы которых находятся в этом ортанте. Из рисунка видно, что вариант 2 и 3 доминируются вариантами 1 и 4.

Пример 2. Для иллюстрации выбора с использованием *метода анализа иерархий* (МАИ) рассмотрим пример:

*Оценка стоимости программного продукта с использованием
метода анализа иерархий (МАИ)*

Практика определения стоимости товара (услуг) методом сравнительного анализа показывает, что зачастую ни один из выбранных подобных аналогов по характеристикам полностью не идентичен оцениваемому товару (услуге). В таких случаях можно использовать МАИ, являющийся систематической процедурой для иерархического представления элементов, определяющих параметры товара.

Задача: ИТ-подразделение организации получило заказ на разработку ПО для оценки эффективности инвестиционных проектов. Заказчик сформулировал свои требования к программе. Используя *продукты-аналоги, стоимость которых известна, определить стоимость разрабатываемого ПО*.

Для разрабатываемого ПО и существующих программ-аналогов будем рассчитывать глобальные приоритеты. Сравнение происходит с помощью матриц парных сравнений.

Расчет стоимости проводится по формуле:

$$C_0 = \frac{\sum C_i \times r_i}{1 - r_0}$$

где C_i и r_i – стоимость и глобальный приоритет i -го аналога, C_0 и r_0 – стоимость и глобальный приоритет оцениваемого ПО.

Исходные данные задачи:

	Project Expert	Бизнес-план PL	Альт-Инвест	Разрабатываемое ПО
Функциональность	Бизнес-планирование международного образца	Бизнес-планирование, ТЭО, финансовое прогнозирование	Бизнес-планирование, инвестиционные проекты с их последующей оптимизацией	Бизнес-планирование, инвестиционные проекты
Обмен данными	Существует (Ms Project, Time Line, Word, FoxPro и др.)	Существует (Ms Office)	Существует (Ms Excel)	Существует – OLE стандарты (текстовые, графические процессоры, DBF форматы)
Системные требования	Невысокие	Невысокие	Повышенные	Невысокие
Графическое представление	Диаграмма Ганта	Отсутствует	Отсутствует	Диаграмма Ганта
Стоимость	470	400	435	?

1. Составляем и рассчитываем матрицы парных сравнений:

1-я – на сравнение критериев (функциональность, обмен данными, системные требования, графическое представление).

2-я – 5-я – по каждому из критериев сравним альтернативы (виды ПО).

Для **проведения парных сравнений** используем таблицу ниже по **правилу**: если элемент строки превосходит элемент столбца, то в яч. на их пересечении ставится **целое число**.

При этом симметричные относительно главной диагонали оценки являются обратно-симметричными по значениям: $a_{ij} = 1/a_{ji}$

Шкала относительной важности для проведения парных сравнений

Уровень	Содержание уровня оценки
1	Приблизительно равная важность факторов
3	Умеренное превосходство одного фактора над другим
5	Существенное превосходство одного фактора над другим
7	Значительное превосходство одного фактора над другим
9	Подавляющее превосходство одного фактора над другим

Пример заполнения и расчета первой матрицы приведен ниже:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		сравнение критериев	Функциональность	Обмен данными	Системные требования	Графическое представление	a_i	r_i	λ_i					
2		Функциональность	1	2	4	6	2,63	0,520	0,9963	ИС=	0,0025			
3		Обмен данными	1/2	1	2	3	1,316	0,260	0,9963	ОС=	0,28%			
4		Системные требования	1/4	1/2	1	2	0,707	0,140	1,0473					
5		Графическое представление	1/6	1/3	1/2	1	0,408	0,081	0,9675					
6			1,92	3,83	7,50	12,00	5,064	1,000	4,0075					
7														
8														
9														

Для расчета используем формулы:

$$a_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n v_i / v_j}; \quad A = \sum_{i=1}^n a_i; \quad r_i = \frac{a_i}{A}; \quad \sum_{i=1}^n r_i = 1$$

Индекс согласованности (ИС) и отношение согласованности (ОС):

$$ИС = \frac{(\lambda_{\max} - n)}{(n-1)} \quad ОС = \frac{ИС}{\text{случайная согласованность}}$$

Случайную согласованность (СС) (в зависимости от n –размера матрицы) берем следующие:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
СС	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Последующие матрицы заполняем и рассчитываем аналогично. Величина вектора приоритетов r_i показывает важность элемента в матрице (чем выше, тем больше).

Функциональность	Project Expert	Бизнес-план PL	Альт-Инвест	Разрабатываемое ПО	a_i	r_i	λ_i		
Project Expert	1	3	1	1	1,32	0,297	0,9910	ИС=	0,0224
Бизнес-план PL	1/3	1	1/3	1/3	0,439	0,099	0,9910	ОС=	2,49%
Альт-Инвест	1	3	1	2	1,565	0,354	1,0018		
Разрабатываемое ПО	1	3	1/2	1	1,107	0,250	1,0834		
	3,33	10,00	2,83	4,33	4,427	1,000	4,0673		
Обмен данными	Project Expert	Бизнес-план PL	Альт-Инвест	Разрабатываемое ПО	a_i	r_i	λ_i		
Project Expert	1	3	7	1	2,14	0,405	1,0028	ИС=	0,0007
Бизнес-план PL	1/3	1	2	1/3	0,687	0,130	0,9742	ОС=	0,08%
Альт-Инвест	1/7	1/2	1	1/7	0,318	0,060	1,0222		
Разрабатываемое ПО	1	3	7	1	2,141	0,405	1,0028		
	2,48	7,50	17,00	2,48	5,286	1,000	4,0020		
Системные требования	Project Expert	Бизнес-план PL	Альт-Инвест	Разрабатываемое ПО	a_i	r_i	λ_i		
Project Expert	1	1	8	1	1,68	0,320	1,0000	ИС=	0,0000
Бизнес-план PL	1	1	8	1	1,682	0,320	1,0000	ОС=	0,00%
Альт-Инвест	1/8	1/8	1	1/8	0,210	0,040	1,0000		
Разрабатываемое ПО	1	1	8	1	1,682	0,320	1,0000		
	3,13	3,13	25,00	3,13	5,256	1,000	4,0000		
Графическое представление	Project Expert	Бизнес-план PL	Альт-Инвест	Разрабатываемое ПО	a_i	r_i	λ_i		
Project Expert	1	5	5	1	2,24	0,417	1,0000	ИС=	0,000
Бизнес-план PL	1/5	1	1	1/5	0,447	0,083	1,0000	ОС=	0,0%
Альт-Инвест	1/5	1	1	1/5	0,447	0,083	1,0000		
Разрабатываемое ПО	1	5	5	1	2,236	0,417	1,0000		
	2,40	12,00	12,00	2,40	5,367	1,000	4,0000		

Величина ОС должна быть порядка 10% или менее (допускается до 20%). Иначе, если ОС выходит за эти пределы, то участникам необходимо исследовать задачу и проверить свои суждения.

2. Рассчитываем матрицу глобальных приоритетов:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
40		Графическое представление	Функциональность	Обмен данными	Системные требования	Графическое представление	Глобальный приоритет r_i	перенести из первой матрицы значения столбца r_i в строку		
41			0,520	0,260	0,140	0,081				
42			0,297	0,405	0,320	0,417	0,338			
43		Project Expert	0,297	0,405	0,320	0,417	0,338			
44		Бизнес-план PL	0,099	0,130	0,320	0,083	0,137	=СУММПРОИЗВ(SC\$42:SFS42;C43:F43)		
45		Альт-Инвест	0,354	0,060	0,040	0,083	0,212			
46		Разрабатываемое ПО	0,250	0,405	0,320	0,417	0,314			
47							1,000			
48										
49										
50										
51										
52										

По вектору глобальных приоритетов видим, что лучшая программа *Project Expert* ($r_i=0,338$). Рассчитаем стоимость разрабатываемого ПО по приведенной в начале задания формуле:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
40									
41		Графическое представление	<i>Функционал ьность</i>	<i>Обмен данными</i>	<i>Системные требования</i>	<i>Графическое представление</i>	Глобальный приоритет r_i	Стоимость	
42			0,520	0,260	0,140	0,081			
43		<i>Project Expert</i>	0,297	0,405	0,320	0,417	0,338	470	
44		<i>Бизнес-план PL</i>	0,099	0,130	0,320	0,083	0,137	400	
45		<i>Альт-Инвест</i>	0,354	0,060	0,040	0,083	0,212	435	
46		<i>Разрабатываемое ПО</i>	0,250	0,405	0,320	0,417	0,314	445	
47							1,000		
48									
49									
50							=СУММПРОИЗВ(G43:G45;H43:H45)/(1-G46)		